Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Vendredi 6 septembre 2019 – Durée : 2 heures

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

Nous rappelons l'encadrement : $2 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 3$.

1. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. (a) Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$.
   (b) Résoudre l'équation $f'(x) \geqslant 0$. En déduire le tableau de variation de f.
   (c) En déduire que f admet un minimum sur $]0,+\infty[$ que l'on précisera.
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.
   (b) Déterminer le signe de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ sur $]0,+\infty[$. Que peut-on en déduire sur la position relative de T et $\mathscr{C}_f$?
4. Tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 2

On considère une application f qui a un point M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans le plan complexe associe le point $f(M)$ affixe

$$z' = i\,\frac{z-2i}{z-i}.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer $(z+1-i)(z-1-i)$.
2. Déterminer les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

EXERCICE 3

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

3. (a) Recopier et compléter la partie « Traitement » de l'algorithme suivant pour qu'il calcule u_n.

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur … Afficher u FIN POUR

   (b) Pour $n = 12$, on a obtenu les valeurs suivantes :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   (b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).