MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N$^{\text{O}}$ 13

Pour le lundi 22 juin 2020

Sujet 1 (classique)

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{4x^{9/4}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X de densité f et on note F_X sa fonction de répartition.

   (b) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.

   (c) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

2. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note F_Y sa fonction de répartition.

   (a) Exprimer F_Y à l'aide de F_X.

   (b) En déduire que Y suit une loi usuelle, que l'on précisera.

   (c) En utilisant Y, écrire des commandes Scilab permettant de simuler une occurence de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

On note $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_c$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE I

On pose : $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, -2, 1)$.

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}_1$.
4. L'endomorphisme f est-il bijectif?

PARTIE II

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

5. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}_c$.
6. Déterminer le rang de g et une base de $\mathrm{Im}(g)$.
7. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
8. Déterminer une base $\mathscr{B}_2 = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sujet 2 (plus difficile)

EXERCICE 3

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.

1. (a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
2. On considère la fonction g définie par :
$$g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0.$$
   (a) Vérifier, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :
$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$
   (b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire Z de densité g, et on note G sa fonction de répartition.
3. (a) On pose $T = \sqrt{2Z}$. On admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G, puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.
   (b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
4. Écrire une commande Scilab permettant de simuler la variable aléatoire Z.

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme
$$f(P) = P'(X+1).$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^k)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.
3. On note A_n la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Expliciter la matrice A_3 (uniquement).
4. On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$$
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X).$$
   (c) Écrire la matrice B_n de f dans la base $\mathscr{B}$.
5. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.
6. En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.