MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 12

Pour le lundi 8 juin 2020

Sujet 1 (classique)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\,(x+1)}$.

1. Démontrer que I_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}, \quad \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de I_1.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$
   Réfléchissez : pourquoi suppose-t-on $n \geqslant 2$ ici ?
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.
   (d) Déterminer alors un équivalent de I_n puis donner la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\,(x+1)^2}$.
   (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer J_0.
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   (b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$.Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. A l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : ')
I = ___
J = ___
J = ___
for k = 2 : n
    I =___
    J =___
end
disp(I, 'la valeur de I est : ')
disp(J, 'la valeur de J est : ')
```

Sujet 2 (plus difficile)

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
3. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Premiers éléments d'étude de f.

On considère l'application f définie sur $J=]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

4. Justifier, pour tout $x\in J$, que l'intégrale $f(x)$ est bien convergente
5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
6. Montrer : $\forall x\in J,\quad 0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
7. (a) Montrer : $\forall (x,y)\in J^2,\ \forall t\in]0,1],\quad \big(x\leqslant y\Longrightarrow t^x\geqslant t^y\big)$.
   (b) En déduire que f est décroissante sur J.
8. Montrer : $\forall x\in J,\quad f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$.
9. Déduire des résultats précédents : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}$.
10. Soit $x\in J$.
    (a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=(-1)^{n+1}f(n+1+x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.
    (b) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.
11. (a) Montrer : $\forall (x,y)\in J^2,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{1}{k+1+x}-\dfrac{1}{k+1+y}\right|\leqslant|x-y|\dfrac{1}{k^2}$,
    puis : $\forall (x,y)\in J^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.
    (b) En déduire que f est continue sur J.
12. Montrer : $f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur J par : $g_k(x)=\dfrac{(-1)^k}{k+1+x}$.

13. Montrer : $\forall (x,y)\in J^2,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ |g_k(x)-g_k(y)-(x-y)g_k'(x)|\leqslant\dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.
    On pensera à l'inégalité de Taylor-Lagrange.
14. (a) Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}g_k'(x)$, pour tout $x\in J$.
    (b) En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x\in J,\ f'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.
    (c) Déterminer $f'(0)$.