Mathématiques – Devoir maison n° 11

Pour le lundi 11 mai 2020
Extrait du devoir de l'an dernier

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie 1 : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile. On considère également la variable aléatoire R égale au rang du premier Pile obtenu.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera F_k l'événement « le k-ième lancer donne Face ».

1. Déterminer la loi de R.
2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. Décrire les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ à l'aide des événements F_k puis calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
4. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant n+1$. Justifier que $P_{[R=k]}(X = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}$.
5. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{4(n+1)}{3^{n+2}}$.

Partie 2 : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

6. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{[X=n]}(U = k)$. On fera plusieurs cas.
8. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$: $P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$.