MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 10

Pour le lundi 27 avril 2020

Vous traitez l'exercice 1, puis au choix, l'exercice 2 ou 3.

EXERCICE 1

PARTIE A

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
2. Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction dérivable en 0. On notera toujours f le prolongement et on précisera les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe de f au point abscisse 0 et sa position relative locale par rapport à la courbe.
6. Étudier les variations de f. On dressera son tableau de variation.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire h définie par : $h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE B

7. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$: $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \dfrac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$
8. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)$,
   où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
9. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.
10. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ converge et écrire $f(x)$ sous forme de somme d'une série.
11. **Facultatif.** Retrouver l'inégalité

$$\forall x \in [0,1],\quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2}$$

    à l'aide d'une formule de Taylor.

EXERCICE 2 – PROBABILITÉ - SUJET 1

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.
À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1. Calculer $E(A_1)$ et $V(A_1)$.
2. Déterminer la loi de A_2. *On justifiera précisément tous les calculs !*
3. Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n (en justifiant).
4. Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n. En déduire $E(A_n)$.

EXERCICE 3 – PROBABILITÉS - SUJET 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
function X = tirage(n)
    urnes = zeros(1,n)
    X = 1
    choix = floor((rand()*n))+1
    while .........
        urnes(choix) = urnes(choix)+1
        choix = floor((rand()*n)+1
        X = .........
    end
endfunction
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   (a) Déterminer la loi de X_2.
   (b) Quelle est la loi de $Y_2 = X_2 - 2$? En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.

   a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement. *On attend ici une courte justification des valeurs extrêmes.*

   b) Montrer que :

   $$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

   On pourra introduire des événements bien choisis.

   c) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n.
   Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
    facto = prod([1:n])
    fac = facto
    somme = 0
    p = n
    for k = 2 : (n+1)
        p = ..........
        fac = ..........
        somme = somme + k*(k-1)/(p*fac)
    end
    E = ..........
endfunction
```