MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N^O 9

Pour le vendredi 20 mars 2020

EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. ✏ Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

3. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function u = suite(n)
  u = 0
  v = 1
  for k = ...:...
    ..........
    ..........
    ..........
  end
endfunction
```

4. Justifier qu'il existe des réels λ et μ (que l'on déterminera en fonction de φ) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

5. Déterminer un équivalent simple de u_n et un équivalent simple de u_{n+1}.

6. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

7. Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

8. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

9. En utilisant le résultat de la question 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

10. ✏ Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi}$. *On pourra sommer la relation précédente pour $n \in [\![1, N-1]\!]$.*

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. Donner $T_n(\Omega)$ et $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en justifiant brièvement.
3. Déterminer $E(S_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. (a) Calculer $P(T_n = 1)$.

   (b) Montrer que :
   $$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

   (c) Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.
5. (a) Déterminer la loi de S_1.

   (b) Calculer $P(S_k = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Pour cette question seulement, on suppose $n = 3$. Déterminer la loi de S_2 dans ce cas.
6. Loi de $S_2 = X_1 + X_2$ en général.

   (a) ✏ En utilisant le système complet d'événements lié à la variable aléatoire X_1, démontrer que :
   $$\forall i \in [\![2, n+1]\!],\ P(S_2 = i) = \frac{i-1}{n^2}.$$

   (b) ✏ Démontrer que :
   $$\forall i \in [\![n+2, 2n]\!],\ P(S_2 = i) = \frac{2n+1-i}{n^2}.$$

   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=2}^{2n} P(S_2 = i) = 1$.