MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 9★

Pour le vendredi 20 mars 2020

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\,t^k$$

1. Calculer $G(1)$.
2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.
3. Exprimer la variance de X à l'aide de $G''(1)$ et de $G'(1)$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   On pourra penser aux accroissements finis.
   (b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   (c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6. Compléter le script suivant pour que les lignes (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables $A(j)$ et $A(p)$.

```
1   n = input('entrez une valeur pour n :')
2   A = [1:n]
3   p = n
4   for k = 1:n
5       j = grand(1,1,'uin',1,p)
6       aux = ----
7       A(j) = ----
8       A(p) = ----
9       p = p-1
10  end
11  disp(A)
```

7. On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur A est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les différentes possibilités soient équiprobables.
   On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m = A(1)
c = 1
for k = 2:n
    if A(k) > m then
        m = A(k)
        c = k
    end
end
disp(c)
```

(a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

(b) Quel est le contenu de la variable c affiché à la fin de ces commandes ?

(c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.
Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c = find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées A_1, A_2, ..., A_n et que le **nombre d'affectations** concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question (7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.
On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.
On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8. Donner la loi de X_1.

9. (a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

   (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

   (c) En considérant le système complet d'événements $([A_n = n], [A_n < n])$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

   (d) Donner la loi de X_4.

10. (a) Vérifier que la formule obtenue à la question (9c) reste valable pour $j = 1$.

    (b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

    (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

11. (a) En utilisant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1}.

    (b) Exprimer E_n à l'aide de u_n et en déduire un équivalent simple de E_n.

12. Recherche d'un équivalent de V_n.

    (a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

    (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

    (c) Déterminer un équivalent de V_n.