MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 8

Pour le lundi 2 mars 2020

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
   (b) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$.
   (c) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (d) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.
   (e) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.
   (b) Etablir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\,v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

EXERCICE 2

PARTIE A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{M(x,y),\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Expliciter A et B.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base.

3. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ et $H = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$
   Montrer que $F = \mathrm{Vect}(X_1)$, $G = \mathrm{Vect}(X_2)$ et $H = \mathrm{Vect}(X_3)$.

4. En déduire que $F \oplus G \oplus H = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. On considère la matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est X_1, la deuxième colonne est X_2 et la troisième colonne est X_3. Écrire la matrice P. Montrer, en utilisant judicieusement les questions précédentes, que P est inversible et donner son inverse.

6. Montrer que

$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   On admettra que $B = PD_BP^{-1}$ avec $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ (que l'on précisera) de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$

8. En déduire une condition *nécessaire* et *suffisante* sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?