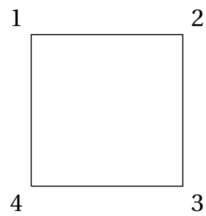
MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 7

Pour le lundi 3 février 2020

EXERCICE 1

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 comme ci-dessous :



Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n.

1. Donner la loi de X_0, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
3. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.
   (b) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que :
   $$\forall k \in [\![1,4]\!],\ P(X_{n+1}=k) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4 \\ i\neq k}} P(X_n = i)$$
   (c) Montrer alors que
   $$\forall k \in [\![1,4]\!],\ P(X_{n+1}=k) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = k).$$
   (d) En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1,4]\!]$
   $$P(X_n = k) = \frac{1}{4} + \left(P(X_0 = k) - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$
   (e) Déterminer alors explicitement la loi de X_n.
   (f) Calculer l'espérance de X_n.
4. On souhaite écrire un script `Scilab` pour qu'il affiche simule la variable aléatoire X_n et calcule que le nombre $N1$ de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses n déplacements.

   Nous pouvons considérer que le mobile se déplace à chaque étape d'un, deux ou trois sommets (aléatoirement) dans le sens horaire.

   Notons $k \in [\![1,4]\!]$ la position du mobile à un moment donné. Soit $a \in \{1,2,3\}$ l'entier donnant le nombre de sommets à parcourir pour arriver à la nouvelle position.

   (a) Donner en fonction de k et a la position du nouveau sommet (on pourra faire un tableau de toutes les possibilités).

(b) Expliquer comment calculer le numéro du sommet à partir de $k+a$. On expliquera notamment quel sommet est atteint si $k+a$ vaut 5.

(c) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il réponde à la consigne.

```
k = 1
n = input('Saisir n :')
N1 = 0
for ............
    a = floor(...*rand()+...)
    if k + a < = 4 then
        k = ...
    else
        k = ...
    end
    // Calcul de N1 -- Autant de lignes que nécessaire
    ...
end
disp(..., 'Xn =')
disp(N1,'N1 =')
```

EXERCICE 2

Soit f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.
3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.