MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 5

Pour le lundi 16 décembre 2019

EXERCICE 1

Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points A, B et C formant un triangle équilatéral.
À l'instant $n = 0$, elle se trouve en A puis elle se déplace selon la règle suivante :

- Si l'araignée se trouve en A à l'instant $n \in \mathbb{N}$, elle ira en B à l'instant $n+1$.
- Si l'araignée se trouve en B à l'instant $n \in \mathbb{N}$, alors à l'instant $n+1$, elle ira en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, en C avec probabilité $\frac{1}{4}$ ou restera en B avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si l'araignée se trouve en C à l'instant, $n \in \mathbb{N}$, elle ira en B à l'instant $n+1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements

- A_n :« L'araignée se trouve en A à l'instant n,
- B_n :« L'araignée se trouve en B à l'instant n,
- C_n :« L'araignée se trouve en C à l'instant n,

et on note

$$a_n = P(A_n), \qquad b_n = P(B_n), \qquad c_n = P(C_n), \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Les théorèmes et propriétés utilisées (avec leurs hypothèses) seront clairement citées.

1. Déterminer a_0, b_0, c_0 ; a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2.
2. Déterminer a_3, b_3 et c_3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier précisément :
   (a) $a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$
   (b) $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$
   (c) $c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$
4. Si à l'instant $n = 3$, l'araignée est en B, avec quelle probabilité était-elle en A à l'instant $n = 2$?
5. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit en B à l'instant $n = 2$, en B à l'instant $n = 3$ et en C à l'instant $n = 4$?
6. Démontrer que, pour $n \geqslant 2$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{2} a_{n+1} + \dfrac{1}{2} a_n$.
7. En déduire l'expression de a_n pour $n \geqslant 2$.
8. En déduire b_n et c_n en fonction de $n \geqslant 2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

et la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

2. (a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Préciser la valeur de $h'(0)$.

   (c) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$ et sa limite en $+\infty$. *On pourra judicieusement utiliser les résultats de la question 1.*

   (d) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.

   (e) On note g la fonction réciproque associée. Dresser son tableau de variation.

   (f) Étudier la continuité et la dérivabilité de g.