MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 4

Pour le lundi 18 novembre 2019.

Exercice du devoir de l'an dernier.

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$.
4. Étudier les variations de la fonction dérivée f'.
5. Dresser alors le tableau des variations de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans un ensemble J à déterminer. On note φ la fonction réciproque associée. Que dire de la continuité et des variations de φ ?
7. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$ sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. On calculera notamment $g'(1)$.
8. Montrer que l'équation $f(t) = t$, d'inconnue $t \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1. Préciser le tableau de signe de la fonction g sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

PARTIE II : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On pensera à utiliser les résultats de la partie I.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

PARTIE III : Informatique

Ces trois questions sont indépendantes les unes des autres.

12. Écrire un programme **Scilab** qui demande de saisir un réel $t \geqslant 0$ et affiche la valeur de $f(t)$.
13. Écrire un programme **Scilab** qui demande de saisir un entier naturel n puis calcule et affiche la valeur de u_n. *On pourra utiliser le fait que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
14. Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 1| < 10^{-4}$.