MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 3

Pour le lundi 4 novembre 2019.

EXERCICE 1

On considère le polynôme

$$P = -X^6 + 3X^5 - 6X^4 + 8X^3 - 7X^2 + 5X - 2.$$

1. Montrer que le nombre complexe i est racine de P.
2. Trouver alors une autre racine de P imaginaire pure. En déduire, sans calcul, que X^2+1 divise P.
3. Déterminer $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2+1)Q$.
4. Trouver une racine double de Q.
5. Factoriser totalement P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 2

On considère la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{array}$.

On admet que : $2 < e < 3$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de φ.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer successivement que φ, φ' et φ'' sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et montrer :
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$
2. Étudier le sens de variation de φ'' sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le signe de φ'' sur $\mathbb{R}^*$. On précisera les solutions de $\varphi''(x) = 0$.
3. Donner les variations (précises) de φ' puis dresser son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}^*$.
*On justifiera bien sûr le calcul des limites **avant** de tracer le tableau.*
4. Montrer : $\forall x > 0,\ \varphi'(x) \geqslant e$.
5. Montrer que l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^*$ et que $-1 < \alpha < 0$. En déduire le tableau de signe de φ' sur $\mathbb{R}^*$.
6. Donner les variations (précises) de φ puis dresser son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}^*$. On ajoutera la valeur de φ en 1.
7. Montrer que $0 < \varphi(\alpha) < 1$.
8. Montrer que $D : y = -x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ puis que $\mathscr{C}$ est au-dessus de D sur $]-\infty, 0[$.
9. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 puis étudier sa position relative avec $\mathscr{C}$ sur $]0,+\infty[$.
10. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$, le plus précisément possible, en faisant apparaître les résultats des questions précédentes.
11. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 3$, $\varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

12. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

14. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.