MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N° 2

À rendre le lundi 7 octobre

EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = 1-e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x+1$. Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n > 0$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

   Remarque : on a donc $h_n(u_n) = 4$ et $h_n(v_n) = 4$.
3. (a) Démontrer que :
   $$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$ puis $h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$.

   (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^n = +\infty$.
   En déduire une contradiction.

   (c) Déterminer la limite de (v_n).
5. **Facultatif.** S'inspirer des questions précédentes pour étudier la monotonie et la limite de (u_n).

EXERCICE 3

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\exp(k)}$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{2019} \binom{2019}{k} (-2)^k$.