MATHÉMATIQUES – DEVOIR MAISON N$^{\text{o}}$ 1

À rendre le lundi 23 septembre

EXERCICE 1

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

1. Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

2. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   (c) En déduire que $b = -a$.
3. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

4. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
5. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et que l'une est positive (on la notera α) et l'autre négative (on la notera β).

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

6. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.
7. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

EXERCICE 2

On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}=0 \quad (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}=0 \quad (2)$$

1. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.
2. Développer $(z-3)(z+2-3\mathrm{i})$, puis $(z-4\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})$.
3. En déduire les solutions de l'équation :
$$\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}\right)\left(z^2-(1+3\mathrm{i})z+4+4\mathrm{i}\right)=0.$$
4. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme exponentielle de z_0.
5. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y=x$.

On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que :

$$z'=z^2-(1+3\mathrm{i})z-6+9\mathrm{i}.$$

6. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
7. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 1