TD13 – AL6
ESPACES VECTORIELS

1 Applications directes du cours

ADC1 (Méthode 1) Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y - z = 0\}$.
5. $E_5 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.
6. $E_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$.
7. $E_7 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tous les coefficients de } M \text{ sont égaux}\}$.
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X + 1) = P(X)\}$.

ADC2 (Méthodes 2 et 3) En utilisant la méthode 2 ou 3, montrer que E_1, E_2 et E_7 sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

ADC3 (Méthode 4)

1. Montrer que $\big((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\big(X+1, X+2, X+3\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$.

ADC4 (Méthode 5)

1. Montrer que $\big((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soient u et v deux suites réelles telles que $u_n = 2^n$ et $v_n = (-1)^n$. Montrer que (u, v) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ADC5 (Méthode 5) Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$;
2. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$;
3. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$;
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$.

ADC6 (Méthode 6) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$;
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$;
4. $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$;
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0\}$
6. $F_6 = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$

ADC7 (Méthode 7) On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$ et $u_4 = (-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

ADC8 (Méthodes 8 et 9)

1. Montrer que $\big((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le vecteur u_0 qui a pour coordonnées $(-5,-3,-1)$ dans cette base.
3. Déterminer les coordonnées de $u_1 = (-5,-3,-1)$ dans cette base.

ADC9 (Méthode 10) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$. Soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Déterminer une équation cartésienne de E.

2 Exercices

Exercice 1 On considère dans $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,0,1)$ $u_2 = (0,1,0)$ $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (3,0,2)$.

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \ ; \ E_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \ ; \ E_3 = \mathrm{Vect}(u_3, u_4) \ ; \ E_4 = \mathrm{Vect}(u_1)$$

2. Montrer que $E_1 = \mathbb{R}^3$.

3. Déterminer un système d'équations linéaires définissant E_2, puis E_3.
   Vérifier que les vecteurs u_1 et u_2 sont bien solutions des équations de E_2. Faire de même pour E_3.

4. Déterminer une base de $E_5 = E_2 \cap E_3$.

Exercice 2 Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. (méthode 1)

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que M appartient à E si et seulement si $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$.
   En déduire la forme des matrices de E.

   (b) Montrer alors, avec un argument simple, que les matrices de E ne sont pas inversibles.

   (c) Déterminer une base de E.

On considère l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

3. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.