TD12 – AN5
Intégration sur un segment

1 Applications directes du cours

ADC1 Calculer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;
2. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\mathrm{Arctan}(x)}}{1+x^2}$;
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$;
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$;
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$;
6. $f : x \mapsto (2x^2-3)^2$;
7. $f : x \mapsto e^x(2e^x-3)^3$;
8. $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

ADC2 **Linéarisation**. Calculer une primitive de $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.

ADC3 Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,dt \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2(t)} \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2+1}\,dt$$

ADC4 Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\cos(t)\ dt$;
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\ dt$;
3. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(t)\,dt$
4. $\displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\,dt$

ADC5 Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t^2\cos(t)\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\sin(t)\,dt$;
3. $\displaystyle\int_0^x (t^2-3t)\,e^{4t}\,dt$

ADC6 Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 dt$ $(x>0)$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$, en posant $t = \tan(u)$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx$, en posant $u = \sqrt{e^x-1}$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, en posant $y = e^x$;
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$, en posant $t = \cos(x)$;
6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2(t)\sin^2(t)}$, en posant $u = \tan(t)$;
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(t)\sin^4(t)\,dt$, en posant $u = \sin(t)$
8. $\displaystyle I = \int_1^e (\ln x)^2\,dx$, en posant $y = \ln(x)$

ADC7 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$;

2 Exercices

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $]1,3[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x\in]1,3[,\quad f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}.$$
En déduire $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On considère la fonction g définie sur $]-\infty,1[$ par $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x\in]-\infty,1[,\quad g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}.$$
En déduire $\displaystyle\int_{-3}^{-2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Factoriser, pour $x\in\mathbb{R}$, $4x^2-4x+1$. En déduire $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$.

4. Déterminer $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$, en commençant par factoriser le dénominateur par 4.

5. Déterminer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$, en commençant par mettre sous forme canonique le trinôme x^2+4x+5 (*ie.* sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$).

Exercice 2 On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$.
3. Calculer alors I_1 et I_2.

Exercice 3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence pour la suite (I_n).
3. Calculer alors I_2 et I_3.

Exercice 4 Dans chaque cas, justifier que la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer sa dérivée :

1. $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
2. $G(x)=\displaystyle\int_0^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
3. $H(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\ln(t^2+t+2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 5

1. Justifier que, pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $1-\dfrac{t^2}{2}\leqslant\cos(t)\leqslant 1$.
2. En déduire que $x\mapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie à droite de 0, et déterminer celle-ci.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est impaire, à l'aide du changement de variable $u=-t$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-2xf(x)$.