TD12 – AN5
Intégration sur un segment

Ce corrigé partiel ne contient que les résultats des calculs. Une rédaction est toujours attendue.

1 Applications directes du cours

ADC1

1. $F\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $F\colon x \mapsto e^{\operatorname{Arctan}(x)}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $F\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
4. $F\colon x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1,+\infty[$;
   $F\colon x \mapsto \ln(-\ln(x))$ sur $]0,1[$;
5. $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{2\cos^2(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$;
6. $F\colon x \mapsto \dfrac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x$ sur $\mathbb{R}$;
7. $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{8}(2e^x - 3)^4$ sur $\mathbb{R}$;
8. $F\colon x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$ sur $]-\infty,1[$ ou sur $]3,+\infty[$.

ADC2 $\sin^2(x)\cos^2(x) = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right) = \dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\cos(4x)$ Une primitive de f sur R est : $x \mapsto \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{32}\sin(4x)$

ADC3 $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$ donc I_1 existe. $I_1 = \left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{4}$.

$I_2 = [\tan(t)]_0^{\pi/4} = 1$

$I_3 = \left[\dfrac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\pi^2}{32}$

ADC4

1. $\displaystyle\int_0^1 t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)\,dt = \sin(1)+\cos(1)-1$;
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,dt = [t\tan(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,dt = \frac{\pi}{4} - [-\ln(|\cos(t)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$;
3. $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,dt = [t\operatorname{Arctan}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = x\operatorname{Arctan}(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)\right]_0^x$
   $= x\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
4. $\displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$.

ADC5

1. $\displaystyle I_1 = \sin(1) - 2\int_0^1 t\sin(t)\,dt = 2\cos(1)-\sin(1)$.
2. $\displaystyle I_2 = -e^{2x}\cos(x)+1+2\int_0^x e^{2t}\cos(t)\,dt = -e^{2x}\cos(x)+1+2e^{2x}\sin(x)-4I_2$. D'où $I_2 = \frac{1}{5}(-e^{2x}\cos(x)+1+2e^{2x}\sin(x))$;
3. $\displaystyle\int_0^x (t^2-3t)e^{4t}\,dt = \left[(t^2-3t)e^{4t}\frac{1}{4}\right]_0^x - \frac{1}{4}\int_0^x (2t-3)e^{4t}\,dt = \frac{1}{4}(x^2-3x)e^{4x} - \frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{4}(2t-3)e^{4t}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{4t}\,dt\right)$
   $= \frac{1}{4}(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{7}{8})e^{4x} - \frac{7}{32}$

ADC6

1. $\displaystyle I_1 = -\int_1^{1/x} (1+u)^4\,du = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$.
2. $\displaystyle I_2 = \int_0^{\pi/4} \cos(u)\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\,[u - \mathrm{Arctan}(u)]_0^{\sqrt{e-1}} = 2\sqrt{\mathrm{e}-1} - 2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{\mathrm{e}-1})$

   en posant $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ (soit $x = \ln(u^2+1)$) ;
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}$

   en posant $y = \mathrm{e}^x$;
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t^2}(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1$

   en posant $t = \cos(x)$;
6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)\sin^2(t)} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right)\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}$

   en posant $u = \tan(t)$;
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(t)\sin^4(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^10)\,\mathrm{d}u = \frac{16}{1155}$

   en posant $u = \sin(t)$
8. $I = \displaystyle\int_0^1 y^2\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \mathrm{e} - 2$ en faisant 2 intégrations par parties (ce que l'on peut aussi faire directement).

ADC7