TD10 – AL5
Systèmes linéaires et matrices

1 Applications directes du cours

ADC1 Résoudre les systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-5y+8z=0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x-y+2z=2 \\ x+y-z=1 \\ x-5y+8z=6 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} 2x-y-z+t=-1 \\ 3x-3y=9 \\ x-z=6 \\ x-y-z=2 \end{cases} \quad S_4 : \begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$$

ADC2 Effectuer tous les produits possibles avec deux des matrices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ADC3 Donner ${}^tA$, ${}^tC$ et ${}^tX$.

ADC4 Soit $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

Écrire la matrice M. Calculer M^2, M^3.
Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

ADC5 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ADC6 Pour chacune des matrices suivantes, montrer que A et inversible et calculer son inverse par deux méthodes différentes :

1. En résolvant le système $AX=B$, pour toute matrice colonne B
2. En appliquant l'algorithme de Gauss sur la matrice $(A|I_n)$.

$$\text{(a) } A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $AA^{-1}=I_3$.

ADC7 En utilisant l'ADC6, montrer que le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=3 \\ x+2z=-1 \end{cases}$ admet une unique solution puis donner celle-ci.

2 Exercices

Exercice 1 Déterminer les solutions du système $\begin{cases} y-z=\lambda x \\ -x-y-z=\lambda y \\ x+2z=\lambda z \end{cases}$ en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique.
2. Montrer que si X est symétrique, ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. Montrer que si X est antisymétrique, ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 3 **Utilisation de la formule du binôme de Newton**

Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En remarquant que $M = N + 2I_3$, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour s'entraîner : appliquer la même méthode avec $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en écrivant $M = N + 3I_4$.

Exercice 4 **Diagonalisation**

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Déterminer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 **Polynôme annulateur**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 10I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
   (a) Quelle est la matrice $A + I_4$? Calculer alors $(A+I_4)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 6A$. En déduire que A n'est pas inversible.