TD9 – AN4
DÉRIVATION

1 Applications directes du cours

ADC1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x|x|$.

ADC2 Soit f définie sur $[0,3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} - x & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ x^2 - 6x + \frac{13}{2} & \text{si} \quad x \in]2,3] \end{cases}$$

Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 1 et en 2.

ADC3 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f, son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'$ puis calculer l'expression de f'.

1. $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2+1}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
4. $f : x \mapsto \cos(x^2) - \sin(x^3)$
5. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
6. $f : x \mapsto |\ln(x)|$
7. $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^{2x})$
8. $f : x \mapsto 2^x$
9. $f : x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+3}\right)$

ADC4 Sur quel domaine $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

ADC5 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On note $g : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la réciproque associée.
Montrer que g est dérivable sur $]-1,1[$ uniquement et déterminer l'expression de g'.

ADC6 En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

2 Exercices

Exercice 1 Soit $f :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \ln(1-|x|)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.
3. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Étudier la continuité puis la dérivabilité de sa réciproque g.
3. Donner l'expression de $g'(y)$ pour tout $y \in J$.

Exercice 3 On pose $a = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{2}}$. Soit f la fonction définie sur $]-a,a[$ par $f(x) = \tan(x^3)$.

Montrer que f réalise une bijection de $]-a,a[$ sur $\mathbb{R}$ et étudier la continuité puis la dérivabilité de sa réciproque.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifie que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que f admet un unique point fixe α, et que $\alpha \in [0,1]$ (*i.e.* l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution).
4. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad |f(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x-\alpha|$$

Exercice 5 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ $(0 < a < b)$.

1. Soit $x_0 \in [a,b]$. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 passe par l'origine si et seulement si $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.
2. En utilisant le théorème de Rolle et la fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$, montrer qu'il existe un point de la courbe représentative de f où la tangente passe par l'origine.