TD9 – AN4
DÉRIVATION

ADC3

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f, son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'$ puis calculer l'expression de f'.

1. $f : x \mapsto x e^{x^2+1}$.
   $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2+1$ et exp sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composée puis produit, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = e^{x^2+1}(1+2x^2)$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$
   f est une fonction rationnelle donc définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   $\forall x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

3. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
   $x \mapsto 1-x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. La fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Par composée, f est définie et continue sur $\mathscr{D} = [-1,1]$ et dérivable sur $\mathscr{D}' =]-1,1[$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. De plus, $\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1} -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas dérivable en -1 et 1.

   On peut aussi utiliser un taux d'accroissement.
   En -1 : soit $x \in]-1,1]$,
   $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{1+x} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to -1}{\longrightarrow} +\infty \notin \mathbb{R}$ donc f n'est pas dérivable en -1.
   Analogue en 1.

4. $f : x \mapsto \cos(x^2) - \sin(x^3)$.
   $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, cos et sin sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Par composées puis différence, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = -2x\sin(x^2) - 3x^2\cos(x^3)$.

5. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
   $x \mapsto x^2+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Par somme, $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

   - Si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+1} > 0$, donc par somme, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   - Si $x < 0$, alors $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+(-x)} > 0$
     car $\sqrt{x^2+1} + (-x) > 0$.

   Puisque ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

6. $f : x \mapsto |\ln(x)|$.
   ln est définie et drivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composée, f est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $\mathscr{D}' = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) \neq 0\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Montrons de plus que f n'est pas dérivable en 1. On utilise le taux d'accroissement. Soit $h > 0$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 1$$

par taux d'accroissement usuel. Et si $h < 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$

Les limites à gauche et à droite ne sont pas égales donc f n'est pas dérivable en 1.
On peut aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée pour montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 1, mais que les nombres dérivés ne sont pas les mêmes.

7. $f : x \mapsto \text{Arctan}(e^{2x})$.
   $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ et $x \mapsto e^{2x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}\mathscr{D}' = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = \dfrac{2\,e^{2x}}{1+e^{4x}}$.

8. $f : x \mapsto x^x = \exp(x\ln(x))$.
   $x \mapsto x\ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et exp est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = (\ln(x)+1)x^x$.

9. $f : x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+3}\right)$.
   $x \mapsto \dfrac{\pi}{x^2+3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est rationnelle et son dénominateur ne s'annule jamais. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \dfrac{\pi}{x^2+3} \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.
   Or tan est définie et dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ (entre autre), donc par composée, f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}' = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x) = -\dfrac{2\pi x}{(x^2+3)^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{x^2+3}\right)\right)$