TD8 – PB1
Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres.

1. Soit E l'ensemble des codes. $\text{Card}(E) = 3 \times 9^4$.

2. (a) Soit A l'ensemble des codes comportant au moins une fois le chiffre 7. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des codes ne comportant aucun chiffre 7. Pour écrire un code de $\overline{A}$: on choisit une lettre (3 possibilités) puis on choisit une 4-liste de $\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$ (8^4 possibilités). Donc $\text{Card}(\overline{A}) = 3 \times 8^4$. Ainsi, $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A}) = 3 \times 9^4 - 3 \times 8^4$.

   (b) Soit B l'ensemble des codes pour lesquels tous les chiffres sont pairs. Pour choisir une main de B : on choisit une lettre (3 possibilités) puis on choisit une 4-liste de $\{2,4,6,8\}$ (4^4 possibilités). Donc $\text{Card}(B) = 3 \times 4^4$.

   (c) Soit C l'ensemble des codes pour lesquels les quatre chiffres sont différents. Pour choisir une main de C : on choisit une lettre (3 possibilités) puis on choisit une 4-liste sans répétition de $[\![1,9]\!]$ ($9 \times 8 \times 7 \times 6$ possibilités). Donc $\text{Card}(C) = 3 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$.

3.

Exercice 2

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Dans une classe de n élèves :

1. Pour choisir un délégué et un suppléant : on choisit un délégué (n possibilités) puis on choisit un suppléant ($n-1$ possibilités). Il y a donc $n(n-1)$ possibilités.
   C'est aussi une 2-liste sans répétition de l'ensemble des n élèves.

2. Choisir 2 délégués, c'est choisir simultanéùment 2 élèves parmi les n élèves de la classe : il y a $\binom{n}{2}$ possibilités.

3. Pour choisir 2 délégués et 2 suppléants : on choisit 2 délégués ($\binom{n}{2}$ possibilités) puis on choisit simultanément 2 suppléants parmi les $n-2$ autres élèves ($\binom{n-2}{2}$ possibilités). Il y a donc $\binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2}$ possibilités.

Exercice 4

Exercice 5 Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 noires, et une urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 noires. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans les conditions suivantes :

- tous les tirages se font avec remise ;
- on effectue un premier tirage dans U_1 ;
- si un tirage donne une boule blanche le tirage suivant se fait dans U_1, sinon il se fait dans U_2.

On note p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage.

1. On note B_k : « obtenir une boule blanche au k-ième tirage. »$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{7} + (1-p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{4}{7}$$

2. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On applique la méthode du cours.
   On trouve $p_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{14}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}$.

Exercice 6

Exercice 7 Soit N :« le résultat est négatif » et E :« la personne est en état d'ébriété ».

1. $(E,\overline{E})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(\overline{N}) = P(E)P_E(\overline{N}) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(\overline{N}) = \frac{2}{100}\times\frac{92}{100}+\frac{98}{100}\times\frac{3}{100} = 0.0478$$

2. Daprès la formule de Bayes,

$$P_{\overline{N}}(E) = \frac{P(E)P_E(\overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{92}{239}$$

3. Daprès la formule de Bayes,

$$P_N(E) = \frac{P(E)P_E(N)}{P(N)} = \frac{8}{4761}$$

4. Soit F :« Le résultat est faux ». $F = (E\cap N)\ \cup\ (\overline{E}\cap\overline{N})$ et les deux événements de l'union sont incompatibles donc :

$$P(F) = P(\ (E\cap N)\ \cup\ (\overline{E}\cap\overline{N})\ ) = P(\ (E\cap N)\ ) + P(\ (\overline{E}\cap\overline{N})\ ) = P(E)P_E(N) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}(\overline{N}) = 0.031$$

Exercice 8 Avec $b=2$, $r=4$ et $n=3$.

Soit B_k :« obtenir une boule blanche au k-ième tirage ».

On cherche $P(\ (\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3)\ \cup\ (B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})\ \cup\ (\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\ )$.

Or, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(B_3) = \frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6} = \frac{4}{27}$$

De même,

$$P(B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}) = P(B_1)P_{B_1}(\overline{B_2})P_{B_1\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3}) = \frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{16}{75}$$

$$P(\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2)P_{\overline{B_1}\cap B_2}(\overline{B_3}) = \frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

Puisque les trois événements sont deux à deux incompatibles,

$$P(\ (\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3)\ \cup\ (B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})\ \cup\ (\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\ ) = P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3)+P(B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})+P(\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}) = \frac{364}{675}$$