TD7 – AL4
Ensembles et applications

1 Applications directes du cours

ADC1 Soient a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts. Donner $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

ADC2 Soient $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0,5]$, parties de $\mathbb{R}$. Donner $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

ADC3 Montrer, par double-inclusion, que

$$\left\{(a-b+1, b+2, -2a+3b+1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 1\right\}$$

ADC4 Déterminer l'ensemble des antécédents de $2X$ par l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P'(1) \end{array}$ puis montrer que l'ensemble image de cette application est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

ADC5 Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.

ADC6 L'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $h(n) = n^2 + 1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC7 Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$ est injective. Est-elle surjective ?

ADC8 Montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$ est surjective. Est-elle injective ?

2 Exercices

Exercice 1 Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$
2. Montrer que si $(A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C)$, alors $B \subset C$.

Exercice 2 Soient E l'ensemble des suites géométriques et

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\}$$

Déterminer $E \cap F$.

Exercice 3 Soit $f : D = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1. Justifier que 1 n'a pas d'antécédent par f. Que peut-on alors dire de l'application f ?
2. Montrer que f réalise une bijection de D sur D. On précisera l'application réciproque associée.
3. Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \{z \in D \mid f(z) \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{z \in D \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}, \quad C = \{z \in D \mid f(z) \in \mathbb{U}\}.$$

4. Déterminer $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Exercice 4 Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Étudier la fonction f. On dressera son tableau de variation.
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Justifier que l'image de f est $[0,1]$.
5. Montrer que la fonction $\tilde{f}: \begin{array}{rcl} [1,2] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{4x-x^2-3} \end{array}$ est une bijection et préciser son application réciproque.

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f, g : E \to F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.