TD7 – AL4
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice 3 Soit $f : D = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

1.

2.

3. Si $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(z) = \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} + i\frac{-2b}{(a-1)^2+b^2}$$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Donc $B = \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

$$f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = 1 \Leftrightarrow |z+1|^2 = |z-1|^2 \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

Donc $C = i\mathbb{R}$.

4. $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = \{f(z),\ \ z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}\}$. Or, d'après la question précédente (ensemble B),

$$z \in \mathbb{U} \setminus \{1\} \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$$

Donc, si $Z \in f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, alors il s'écrit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et donc $Z = f(z) \in i\mathbb{R}$. On a donc $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subset i\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons $Z \in i\mathbb{R}$. On cherche $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ tel que $Z = f(z)$. On sait que $Z \in D$, donc d'après la question 1, Z a un unique antécédent $z = \dfrac{Z+1}{Z-1}$. On remarque que $z = f(Z)$. Comme $Z \in i\mathbb{R}$, l'ensemble C de la question précédente montre que $z \in \mathbb{U}$ et $z \neq 1$ (valeur interdite) donc $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Ainsi, $Z \in f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$. On a donc $i\mathbb{R} \subset f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Par double inclusion : $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$

Exercice 4 Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

1.

2.

3.

4.

5. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,2]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[1,2]$ dans $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [0,1]$.
   Ceci signifie que $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} [1,2] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{4x - x^2 - 3} \end{array}$ est une bijection.

   Cherchons l'expression de l'application réciproque. Soit $y \in [0,1]$. Soit $x \in [1,2]$.

   $$f(x) = y \Leftrightarrow 4x - x^2 - 3 = y^2 \text{ (car les deux nombres sont positifs) } \Leftrightarrow x^2 - 4x + (3 + y^2) = 0$$

   On a une équation du second degré. $\Delta = 4(1 - y^2) \geqslant 0$ car $y \in [0,1]$.

   Si $y = 1$, $\Delta = 0$ et il y a une unique solution $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2 \in [1,2]$.

   Si $y \in [0,1[$, $\Delta > 0$ et les racines réelles de l'équation sont $x_1 = 2 - \sqrt{1 - y^2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{1 - y^2}$. Or $1 - y^2 > 0$ donc $x_2 > 2$ ne convient pas. De plus, $0 < 1 - y^2 \leqslant 1$ donc $1 \geqslant x_1 < 2$. Ainsi, il y a une unique solution dans $[1,2]$ qui est $x_1 = 2 - \sqrt{1 - y^2}$.

   Remarquons que, si $\Delta = 0$, $x_0 = x_1$.

   On a montré que, pour tout $y \in [0,1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans $[1,2]$ qui vaut $x = 2 - \sqrt{1 - y^2}$. La réciproque de la fonction $\tilde{f}$ est donc

   $$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [1,2] \\ y & \longmapsto & 2 - \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f, g : E \to F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Injectivité de f : Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $(f \circ g)(f(x)) = (f \circ g)(f(x'))$ c'est-à-dire $(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g \circ f)(x')$. Or, $f \circ g \circ f : E \to F$ est injective (car bijective) donc $x = x'$.

Ainsi, f est injective.

Surjectivité de f : Soit $y \in F$. Puisque $f \circ g \circ f : E \to F$ est surjective (car bijective), il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g \circ f)(x)$. On a alors $y = f((g \circ f)(x))$ donc $(g \circ f)(x) \in E$ est un antécédent de y par f.

Ainsi, f est surjective.

Conclusion : on en déduit que f est bijective.

Notons $\varphi_f : F \to E$ sa réciproque et $h = f \circ g \circ f$ (qui sont toutes deux bijectives.)

Alors $\varphi_f \circ h \circ \varphi_f = (\varphi_f \circ f) \circ g \circ (f \circ \varphi_f) = \mathrm{id}_E \circ g \circ \mathrm{id}_F = g$. Donc g est la composée d'applications bijectives : elle est bijective.