TD6 – AN3
Limites et continuité

1 Applications directes du cours

Étudier les limites des fonctions suivantes (si besoin, on séparera limite à gauche et à droite).

ADC1

1. $x \longmapsto x^5 + 5x^2 - \mathrm{e}^x$ en $-\infty$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 et -1
3. $x \longmapsto \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

ADC2

1. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
2. $x \longmapsto \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
3. $x \longmapsto \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$ en 4

ADC3

1. $x \longmapsto x^5 + 5x^2 - \mathrm{e}^x$ en $+\infty$
2. $x \longmapsto \ln(x) \times \ln(\ln(x))$ en 1
3. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$ en 0
4. $x \longmapsto \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}$ en $+\infty$
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.
6. $x \longmapsto (1 + \cos(x))^{\frac{3}{\cos(x)}}$ en $+\frac{\pi}{2}$
7. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ en 0
8. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^3}{x-3}$ en 3

ADC4

1. $x \longmapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0
2. $x \longmapsto x(2 + \sin(x))$ en $+\infty$.

ADC5 Les fonctions suivantes sont-elles continues à droite en 0 ? continues à gauche en 0 ? continues en 0 ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

ADC6 Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Justifier que f est continue sur $]0,1[$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en 0 ?

ADC7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. f est-elle prolongeable par continuité sur en 0 ?

ADC8 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x - x^2}$ réalise une bijection de $[\frac{1}{2}, 1]$ dans un intervalle à préciser. Déterminer ensuite l'expression de la fonction réciproque associée.

2 Exercices

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Par une méthode analogue, étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f à droite en 0.
4. Par une méthode analogue, étudier la limite de f à gauche en 0.

Exercice 2

1. En posant $h = x - 1$, déterminer la limite en 1 de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.
2. Par une méthode analogue, déterminer la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de $x \mapsto \dfrac{8x^3 - \pi^3}{\cos(x)}$.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 4

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x = n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, a une seule solution, que l'on notera u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.
Montrer que f est constante, égale à 1 ou -1.

Exercice 6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante.