TD6 – AN3
Limites et continuité – Corrigé

ADC 2.2

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)=0$

ADC 3.6

$f : x \longmapsto (1+\cos(x))^{\frac{3}{\cos(x)}}$ en $+\frac{\pi}{2}$

On a : $f(x)=\exp\left(\frac{3}{\cos(x)}(1+\cos(x))\right)$.

Posons $h=\cos(x)\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}0$. Alors $\frac{3}{\cos(x)}(1+\cos(x))=3\dfrac{\ln(1+h)}{h}\underset{h\to0}{\longrightarrow}3\times1$ par taux d'accroissement usuel.

Or, $\lim\limits_{X\to3}\exp(X)=\mathrm{e}^3$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\mathrm{e}^3$.

ADC 4.2

Soit $x>0$. On a : $\sin(x)\geqslant-1$ donc $2+\sin(x)\geqslant1$ puis $x(2+\sin(x))\geqslant x$ car $x>0$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Par minoration, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}x(2+\sin(x))=+\infty$.

Exercice 2 On pose $h=x-\frac{\pi}{2}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}0$.

Alors

$$\frac{8x^3-\pi^3}{\cos(x)}=\frac{8(\frac{\pi}{2}+h)^3-\pi^3}{\cos(\frac{\pi}{2}+h)}=\frac{6h\pi^2+12\pi h^2+8h^3}{-\sin(h)}=-\frac{6\pi^2+12\pi h+8h^2}{\frac{\sin(h)}{h}}$$

Or, $\lim\limits_{h\to0}(6\pi^2+12\pi h+8h^2)=6\pi^2$ et $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$ par taux d'accroissement usuel. Donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{8x^3-\pi^3}{\cos(x)}=-6\pi^2$$