

TD5 – AL3 POLYNÔMES

1 Applications directes du cours

ADC1 Soient $P = X^2 + 3X - 2$ et $Q = 6X - X^2 + 1$. Déterminer $P + Q$, $3P - 2Q$, P^3 , PQ et $P(Q(X))$.

ADC2 Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $X^3 - (X - 2 + i)^2$ | 4. $\prod_{k=1}^n (2X^k - k)$ |
| 2. $X^3 - X(X - 2 + i)^2$ | 5. $(X + 1)^{2016} - (4X^2 + aX)^{1008}$. |
| 3. $(X + 1)^n - (X - 1)^n$ | |

ADC3 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on définit $f(P) = P(X + 1) - P(X)$.
Montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et $f(X^3)$.

- ADC4**
1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$.
 2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

ADC5 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$
2. $2X^5 + X^3 + 17X - 2$ par $X^2 + 2X + 3$

ADC6 Soit $P = -3X^2 + 6X - 6$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

ADC7 Soit $P = 2X^3 - 2X^2 - 28X + 48$.
Montrer que 2 est racine de P puis factoriser (au maximum) P dans $\mathbb{R}[X]$.

ADC8 Montrer que -1 est racine triple de $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ et factoriser P .

2 Exercices

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la dérivée du polynôme $P = (X + 1)^n$, calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.
2. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 3 On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = 2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Calculer T_3 et T_4 .
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n .

Exercice 4

1. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R(2)$ puis en déduire R .
2. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R'(1)$ puis en déduire R .

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos(t)) = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.
2. En déduire que P est constant.

Exercice 7 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $X^4 + X^2 + 1$ et $X^4 - X^2 + 1$. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $P = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 8 Factoriser dans $\mathbb{K}[X] : P = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$, $Q = X^4 + 1$, $R = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, où $\theta \in \mathbb{R}$.