TD5 – AL3
Polynômes – Corrigé

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ une solution de l'équation. On a : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Cherchons des informations sur $\deg(P)$.

$$\deg(P(X^2)) = \deg(X^2) \times \deg(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(P) = -\infty \\ 2\deg(P) & \text{si } \deg(P) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\deg((X^2+1)P(X)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(P) = -\infty \\ 2+\deg(P) & \text{si } \deg(P) \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, soit $\deg(P) = -\infty$, soit $\deg(P) \geqslant 0$ et $2\deg(P) = 2+\deg(P)$, ce qui donne $\deg(P) = 2$.

On a donc deux possibilités : $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(P) = 2$.

Synthèse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(P) = 2$. Cherchons lesquels de ces polynômes sont effectivement solution de l'équation.

Si $\deg(P) = -\infty$, alors $P = 0$ et P est bien solution de l'équation.

Si $\deg(P) = 2$, $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(X^2) = (X^2+1)P(X) &\Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) \\
&\Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a+c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a+c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = aX^2 - a
\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\{0\} \cup \{aX^2 - a,\ \ a \in \mathbb{R}^*\} = \{aX^2 - a, \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

   Initialisation : $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n) = 0$. Alors $Q(n+1) = P(n+1) - P(0) = P(n) - P(0) = Q(n) = 0$.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

2. Le polynôme Q a une infinité de racine (tous les entiers naturels) donc $Q = 0$, puis $P(X) = P(0)$ donc P est constant?

Exercice 7 Dans $\mathbb{C}[X]$: $X^4 + X^2 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ (fait en cours). On en déduit que : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

On procède de même pour $X^4 - X^2 + 1$.

On cherche les racines complexes (en résolvant d'abord $Z^2 - Z + 1 = 0$). Les racines complexes sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $-e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-e^{-i\frac{\pi}{6}}$. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$X^4 - X^2 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

puis, dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4 - X^2 + 1 = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

Enfin,

$$X^8+X^4+1 = (X^2)^4+(X^2)^2+1 = (X^4-X^2+1)(X^4+X^2+1) = (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$$

Exercice 8 $R = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta})$.