TD4 – AL2
Sommes algébriques

1 Applications directes du cours

ADC1 Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ADC2 Déterminer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2+3k)$.

ADC3 Déterminer $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\ell+1}$.

ADC4 En remarquant que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

ADC5 Calculer $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$.

ADC6 Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$.

2 Exercices

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Quels sont alors les comportements asymptotiques possibles pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2 Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes.

Exercice 3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,2\pi[$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$; $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ikx}$; $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On commencera par montrer que, pour $k \leqslant n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Exercice 4 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.