TD3 – AN2
Suites numériques

1 Applications directes du cours

ADC1 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

ADC2 Donner le terme général de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme -3 et de raison 5.

ADC3 Donner le terme général de la suite géométique $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{2}$.

ADC4 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = 2,\ \text{ et }\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 7.$$

ADC5 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 2,\ \ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

ADC6 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0,\ \ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

ADC7 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 1,\ \ u_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

ADC8 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$;
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;
3. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n^5 + 3^n}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

ADC9 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^2 - n\cos(n)}$;
3. $u_n = \ln(n) + \sin(n)$.

2 Exercices

Exercice 1 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Étudier le signe de $g : x \mapsto \sqrt{2+x} - x$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Étudier le sens de variation de u.
4. Montrer que u est convergente. Déterminer la valeur de sa limite ℓ.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n \leqslant -1$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer, par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Que dire alors de sa limite ?

Exercice 4 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique. On précisera sa raison puis son terme général.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel.

Exercice 1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$. On suppose que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Exercice 2 Soit (u_n) une suite de réels non nuls tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Déterminer la limite de (u_n).