TD2 – AL1
NOMBRES COMPLEXES

1 Applications directes du cours

ADC1 Calculer les parties réelle et imaginaire des complexes : $z_1 = (3+2i)^2(2-i)$ et $z_2 = \dfrac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$.

ADC2 Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

1. 57
2. $-4i$
3. $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$
4. $z_4 = -1 - i$.
5. $z_5 = 2 - 2i$
6. $\dfrac{z_3}{z_5}$
7. $z_4 z_5$

ADC3 Linéariser, à l'aide des formules d'Euler : $\cos^3(x)\sin(x)$; $\sin^4(x)$.

ADC4 Résoudre, sous forme exponentielle, l'équation $z^2 = \sqrt{3} + i$.

2 Exercices

Exercice 1 Déterminer une écriture trigonométrique/exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_6 = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_7 = \sin(\theta) + i\cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.
3. $z_8 = (1-i)(1+i)^{2n}$

Indication : Pour z_6, on pourra factoriser par $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$ et reconnaitre ensuite une formule d'Euler.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(i-z)^n = z^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé)
2. $|z| + \bar{z} = 6 - 2i$

Exercice 3 On considère le nombres complexes : $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_4 = -1 - i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_3}{z_4}$.
2. Déterminer la forme exponentielle puis trigonométrique de $\dfrac{z_3}{z_4}$.
3. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 On souhaite résoudre l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - (3-4i)z + 8 + 6i = 0$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution imaginaire pure, que l'on précisera.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 - (3-4i)z + 8 + 6i = (z-2i)(z^2 - 3 + 4i)$.
3. (a) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que
$$z^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$
   (b) Résoudre le système $\begin{cases} A + B = 5 \\ A - B = 3 \end{cases}$
   (c) Déterminer alors les solutions de l'équation $z^2 = 3 - 4i$ sous forme algébrique.
4. Conclure.