# TD2 – AL1
## CORRIGÉ

**Exercice 2** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soir $z \in \mathbb{C}$. Remarquons que $z = 0$ n'est pas solution de l'équation (car $i^n \neq 0$), donc on peut supposer $z \neq 0$. Dans ce cas,

$$(i-z)^n = z^n \Leftrightarrow \left(\frac{i-z}{z}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{i-z}{z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$$

en reprenant la résolution de $Z^n = 1$ faite dans le cours.

$$\begin{aligned}(i-z)^n = z^n &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{i-z}{z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ i - z = z\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ i = z\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \frac{i}{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1}\end{aligned}$$

en remarquant que $\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \neq -1$ (car la première ligne donnerait sinon $i = 0$).

On peut écrire les solutions sous forme exponentielle :

$$\frac{i}{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}+1} = \frac{i}{\mathrm{e}^{ik\pi/n}\left(\mathrm{e}^{ik\pi/n}+\mathrm{e}^{-ik\pi/n}\right)} = \frac{i}{\mathrm{e}^{ik\pi/n}\times 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/n}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

2. Soit $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$|z| + \bar{z} = 6 - 2i \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a - ib = 6 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}+a = 6\\ -b = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+4} = 6-a\\ b = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6-a \geqslant 0\\ a^2+4 = (6-a)^2\\ b = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-a \geqslant 0\\ a^2+4 = a^2-12a+36\\ b = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \leqslant 6\\ a = \frac{8}{3}\\ b = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{8}{3} + 2i$$

L'unique solution est $\frac{8}{3} + 2i$.