TD1 – AN1
Étude de fonctions – Inégalités

1 Applications directes du cours

ADC1 Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 7x^4$
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+7}$
3. $f : x \mapsto x\ln(x)$
4. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

ADC2 Dérivée d'une composée

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^3\cos(5x+1)$.
2. $f : x \mapsto \exp\big(\sin(x)\big)$.
3. $f : x \mapsto \ln(3x^2+1)$.
4. $f : x \mapsto \tan(\sqrt{x})$.

ADC3 Formules de trigonométrie

1. Vérifier que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire, à l'aide des formules de trigonométrie, la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. On vérifiera que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 1$.
2. Exprimer $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

ADC4 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2+2}$
2. $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2}{x-1}$
3. $x^3 + 1 \leqslant 0$.

ADC5 Valeur absolue

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $|x+1| < 4$
2. $|2x+1| \leqslant |x-3|$
3. $|2x+3| > 6$

ADC6 Partie entière

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor x + \dfrac{3}{4} \right\rfloor = 2$.*On traduira cette équation par un encadrement.*

2 Exercices

Exercice 1 On pose $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. *On pourra faire deux cas, suivant le signe de x.*
2. Justifier que f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est impaire.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $\frac{1}{2}$
2. Montrer que la droite $\Delta : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On précisera la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
3. Justifier que f est dérivable sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ puis étudier les variations de f. On dressera son tableau de variation complet.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [1,+\infty[$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(2x)$.
5. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
6. La fonction f admet-elle des extrema (sur $\mathbb{R}$) ? Préciser.
7. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. puis en celui d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
8. Tracer l'allure de la courbe de f sur $[-\pi,\pi]$.