TD1 – AN1
CORRIGÉ

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

Fin de l'exercice :

x	$\frac{1}{2}$			1		$+\infty$
f	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

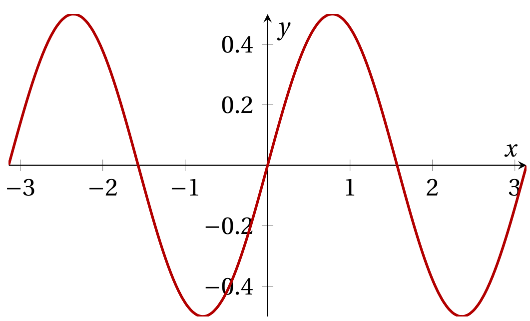
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue (car dérivable – question 3) et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. De plus, n appartient à $[1,+\infty[= \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [1,+\infty[$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x) = -\cos(x)\sin(x) = -f(x)$ donc f est impaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, Alors $x+\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) = -\cos(x)\times(-\sin(x)) = \cos(x)\sin(x) = f(x)$, donc f est π-périodique.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$.
4. cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par produit f l'est aussi. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x) = \cos(2x)$.
5.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$2x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos(2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

6. $\frac{1}{2}$ est le maximum sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc sur $\mathbb{R}$ par π-périodicité. De même, $-\frac{1}{2}$ est le minimum sur $\mathbb{R}$.
7. $T_0 : y = x$, $T_{\frac{\pi}{2}} : y = -x+\frac{\pi}{2}$.
8.



Remarque : on peut aussi remarquer que $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.