Programme de colle S19

4 au 8 fevrier 2019

AN5 Intégration sur un segment

1. **Primitives d'une fonction sur un intervalle**
   - ▷ Notion de primitive. Deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante. Primitive d'une combinaison linéaire.
   - ▷ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
   - ▷ Primitives usuelles. Reconnaître la dérivée d'une composée. Utilisation de la linéarisation d'expressions trigonométriques.
2. **Intégrale d'une fonction sur un segment**
   - ▷ **Définition de l'intégrale :** pour f continue sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.
   - ▷ Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chales, inégalité triangulaire. Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est nulle sur $[a,b]$.
   - ▷ Prolongement aux fonctions continues par morceaux.
3. **Calcul intégral**
   - ▷ Intégration par parties.
   - ▷ Changement de variable.
   - ▷ Utilisation de la parité, de la périodicité.

Compétences attendues

- ▷ Calculer une primitive : connaître les primitives usuelles, reconnaître/faire apparaître la dérivée d'une composée, linéariser une expression trigonométrique pour trouver une primitive.
- ▷ Justifier qu'une intégrale existe : en précisant que f est continue (ou au moins continue par morceaux) sur le segment $[a,b]$.
- ▷ Calculer une intégrale : à l'aide d'une primitive ; en utilisant une intégration par parties ; en utilisant un changement de variable (qui sera donné).
- ▷ Utiliser le calcul intégral pour calculer une primitive $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- ▷ Connaître et savoir utiliser les propriétés de l'intégrale.

AL6 Espaces vectoriels

Prérequis : Polynômes, systèmes, matrices, suites réelles, fonctions.

1. **Notion d'espace vectoriel**
   - ▷ Définition d'espace vectoriel. Espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, ensemble des suites réelles, ...
   - ▷ Combinaison linéaire : définition, stabilité par combinaison linéaire.

- ▹ Sous-espace vectoriel : définition, exemples vus en cours : $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues -ou dérivables- de I dans $\mathbb{R}$. Intersection de sous-espaces vectoriels.

2. **Familles de vecteurs**

- ▹ Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- ▹ Familles génératrices.
- ▹ Familles libres. Familles liées. Cas d'une famille contenant un seul vecteur.
- ▹ Bases. Base canonique des espaces usuels ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

COMPÉTENCES ATTENDUES

- ▹ Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- ▹ Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel et déterminer une famille génératrice/ une base.
- ▹ Montrer qu'une famille est libre/liée.

Pour les élèves : il faut maitriser la méthode 1 puis la méthode 6/7 du cours (et donc celles qui précèdent : 2/3 et 5 surtout).

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Calcul d'une primitive de la fonction ln sur $]0,+\infty[$.
- Montrer que $S = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Définir $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
- Démontrer la propriété d'identification des coefficients pour une famille libre :
  $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$ est libre si et seulement si

$$\forall (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}^{2n}, \quad \sum_{k=1}^n a_k u_k = \sum_{k=1}^n b_k u_k \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ a_k = b_k$$

Rappel des chapitres déjà vus

AN1 : Étude de fonctions	AL1 : Nombres complexes	PB1 : Probabilités sur un univers fini
AN2 : Suites réelles	AL2 : Sommes et produits	PB2 : Variables aléatoires finies
AN3 : Limites et continuité	AL3 : Polynômes	
AN4 : Dérivation	AL4 : Ensemble et applications	
AN5 : Intégration (1)	AL5 : Systèmes et matrices	
	AL6 : Espaces vectoriels	