Programme de colle S17

21 au 25 janvier 2019

AL5 Systèmes linéaires et calcul matriciel

1. **Résolution d'un système linéaire** : Opérations élémentaires. Méthode du pivot de Gauss.
2. **Matrices**
   - ▷ Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   - ▷ Opérations dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: Addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire. Produit matriciel. Transposée d'une matrice. Transposée d'un produit. Notation ${}^tA$.
3. **Matrices carrées**
   - ▷ Ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques. Produit de deux matrices diagonales/triangulaires supérieures/triangulaires inférieures.
   - ▷ Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme de Newton. Cas des matrices diagonales.
4. **Matrices carrées inversibles**
   - ▷ Définition. Inversibilité et inverse éventuelle d'une matrice 2×2 et d'une matrice diagonale. Inversibilité d'une matrice triangulaire. Inverse d'un produit, de la transposée.
   - ▷ Écriture matricielle d'un système. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi, $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
   - ▷ Méthodes pour déterminer si une matrice est inversible : résolution de $AX = B$, pour tout B ou algorithme du pivot sur la matrice $(A|I_n)$.

Compétences attendues

- ▷ Résoudre un système linéaire. Écrire l'ensemble des solutions.
- ▷ Réaliser un calcul matriciel. Savoir si un produit AB est défini et si oui, prévoir sa taille.
- ▷ Calculer les puissances d'une matrice carrée : à la main pour les petites puissances ; par récurrence ; avec la formule du binôme de Newton. Cas d'une matrice diagonale à connaître.
- ▷ Déterminer si une matrice diagonale ou d'ordre 2 est inversible et donner son inverse. Déterminer si une matrice triangulaire est inversible.
- ▷ Déterminer si une matrice est inversible en utilisant une relation matricielle (ex 5 du TD).
- ▷ Étudier l'inversibilité et déterminer l'inverse éventuelle d'une matrice : par algorithme du pivot sur $(A|I_n)$ ou par résolution du système $AX = B$ pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- ▷ Sachant que A est inversible et connaissant son inverse, résoudre rapidement le système $AX = B$.

PB2 Variables aléatoires réelles sur un univers fini

1. **Variable aléatoire réelle sur Ω, univers fini**
   - ▷ Définition de variable aléatoire. L'ensemble des valeurs prises par X, noté $X(\Omega)$, est un ensemble fini de $\mathbb{R}$. Événements $[X = x]$, $[X \in I]$, $[X \leqslant x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire.

- ▷ Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Loi de $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$.
- ▷ Fonction de répartition de X, notée F_X. Propriétés. Elle caractérise la loi.

2. **Espérance, variance, écart-type**

- ▷ Définition de l'espérance : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$. Linéarité. Théorème de transfert.
- ▷ Variance et écart-type d'une variable aléatoire.
  Formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ▷ $V(aX + b)$, $\sigma(aX + b)$, Cas où $V(X) = 0$.
- ▷ Variables aléatoires centrées, réduites. Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

3. **Lois usuelles**

- ▷ Variable aléatoire certaine (constante)
- ▷ Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, espérance, variance. Plus généralement, loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$.
  Notation $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big(\{x_1, \dots, x_n\}\big)$.
- ▷ Loi de Bernoulli, espérance et variance. Notation $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
- ▷ Loi binomiale, espérance, variance. Notation $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Compétences attendues

- ▷ Déterminer la loi d'une variable aléatoire. Prérequis : Chapitre PB1.
- ▷ Déterminer la loi de $Y = g(X)$. On se limitera à des cas simples : $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
- ▷ Représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- ▷ Calculer l'espérance, la variance, l'écart-type d'une variable aléatoire.
- ▷ Savoir reconnaître une loi classique et utiliser les résultats du cours.

Info Fonctions

- ▷ Déjà vu : `input`, `disp`, instructions `if`, boucles `for` et `while`.
- ▷ Définir une fonction en langage Scilab.

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Démontrer que le produit de deux matrices de $GL_n(K)$ est inversible et donner son inverse.
- Définition de la variance et démonstration de la formule de Huygens.
- Définition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calcul de l'espérance et de la variance.
- Définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, calcul de l'espérance.
- Informatique : Définir la fonction `factorielle(n)` renvoyant $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Rappel des chapitres déjà vus

AN1 : Étude de fonctions	AL1 : Nombres complexes	PB1 : Probabilités sur un univers fini
AN2 : Suites réelles	AL2 : Sommes et produits	PB2 : Variables aléatoires finies
AN3 : Limites et continuité	AL3 : Polynômes	
AN4 : Dérivation	AL4 : Ensemble et applications	
	AL5 : Systèmes et matrices	