Programme de colle S11

26 au 30 novembre 2018

AL4 Ensembles et applications

1. **Vocabulaire ensembliste**.
   - ▷ Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$. Ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E.
   - ▷ Complémentaire. Notation $\overline{A}$. Ensemble $A \setminus B$. $\cap$, $\cup$. Lois de De Morgan.
   - ▷ Produit cartésien d'ensembles.
2. **Applications**
   - ▷ Définition. Vocabulaire : image, antécédént. Image d'une application (notation $f(E)$ ou $\mathrm{Im}(f)$), image d'un ensemble par f (notation $f(A)$).
   - ▷ Composée de deux applications. Restriction et prolongement d'une application.
   - ▷ Applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque.
   - ▷ Une fonction strictement monotone est injective.

Compétences attendues

- ▷ Savoir montrer une inclusion de deux ensembles, l'égalité de deux ensembles (par double-inclusion ou par équivalence).
- ▷ Déterminer l'ensemble image d'une application (pour les fonctions, on pourra utiliser le théorème de la bijection).
- ▷ Montrer qu'une application est bijective et déterminer son application réciproque.
- ▷ Montrer qu'une fonction est injective par étude des variations ; appliquer le théorème de la bijection.
- ▷ Montrer qu'une application est injective/surjective.

PB1 Dénombrements – Probabilités sur un univers fini (début)

Sommes et produits (en particulier : les coefficients binomiaux, factorielle, etc.).

1. **Dénombrement**
   - ▷ Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal d'une union disjointe, d'une union, de $A \setminus B$ avec $B \subset A$, de $\bar{A}$. Cardinal d'un produit cartésien.
   - ▷ Nombre de p-listes de E.
   - ▷ Nombre de p-listes sans répétition de E. Cas particulier : permutations de E.
   - ▷ Nombre de parties à p éléments de E. $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.
2. **Univers - Événements**
   - ▷ Univers Ω (fini non vide). Événements. Opérations, événements incompatibles.
   - ▷ Système complet d'événements : une famille finie d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes :
     $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \ i \neq j,\ \ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

3. **Notion de Probabilité**

   ▷ Définition d'une probabilitéUne probabilité est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ et vérifiant $P(\Omega)=1$ et $\forall(A,B)\in\mathscr{P}(\Omega)^2$ incompatibles, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (P est additive).

   ▷ Propriétés : probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles. Si $(A_1,\dots,A_n)$ est un système complets d'événements, $\sum_{k=1}^{n} P(A_k)=1$. Formules donnant : $P(\overline{A})$, $P(A\setminus B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cup B\cup C)$. Calcul de $P(A)$ comme somme des probabilités des événements élémentaires composant A.

   ▷ Une probabilité P est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Cas de l'équiprobabilité : **probabilité uniforme**.

Compétences attendues

▷ Reconnaître une situation type de dénombrement (dénombrement de listes, de listes sans répétition ou de combinaisons) ;

▷ Réaliser et rédiger un calcul de dénombrement.

▷ Justifier et rédiger un calcul de probabilité, dans le cadre d'une **probabilité uniforme** sur Ω.

Info Boucles while

▷ Déjà vu : `input`, `disp`, instructions `if`, boucles `for`

▷ Boucles `while`

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Démontrer que la composée de deux applications injectives/surjectives est injective/surjective (au choix du colleur).
- Démontrer que, si P est une probabilité sur Ω et que A,B sont des événements de Ω, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- Donner la définition de la probabilité uniforme et démontrer que c'est une probabilité sur Ω.
- **Informatique :**
  - Écrire un programme qui affiche le plus petit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\leqslant 0{,}01$ avec $u_0=5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{4+u_n}-2$ (ou tout exemple du même type).
  - Écrire un programme qui affiche le plus grand $n\in\mathbb{N}$ tel que $2^n\leqslant 10000$ (ou tout autre exemple du même type).

Rappel des chapitres déjà vus

AN1 : Étude de fonctions	AL1 : Nombres complexes	PB1 : Probabilités sur un univers fini.
AN2 : Suites réelles	AL2 : Sommes et produits	
AN3 : Limites et continuité	AL3 : Polynômes	
	AL4 : Ensemble et applications	