Programme de colle S8

5 au 9 novembre 2018

AL3 Polynômes

1. **Définition de $\mathbb{K}[X]$**
   - Polynôme, ensemble $\mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), application polynomiale associée à un polynôme P (on confondra les deux notions).
   - Opérations : combinaison linéaire, produit, puissance, composition, dérivation. Propriétés des opérations.
   - Identités valables dans $\mathbb{K}[X]$: binôme de Newton, $X^{n+1} - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. **Degré d'un polynôme**
   - Définition. Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Coefficient dominant/terme dominant d'un polynôme non nul. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$.
   - Degré de $P^{(k)}$, $P+Q$, de λP, de PQ, de P^n, de $P(Q(X))$.
   - $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.
3. **Division euclidienne**
   - Vocabulaire : multiple, diviseur
   - Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. CNS de divisibilité.
4. **Racines**
   - Définition. a est racine de P ssi $X - a$ divise P.
   - Multiplicité. a est racine de multiplicité m ssi $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
     NB pour les colleurs : la caractérisation avec les dérivées n'a pas encore été vue.
   - Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines (deux à deux distinctes, ou comptées avec multiplicité), alors $P = 0$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines, alors $P = 0$. Autrement dit, un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (forcément non nul) admet au plus n racines (comptées avec multiplicité).
5. **Factorisation**
   - Dans $\mathbb{C}[X]$: théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1. Exemple de $X^n - 1$.
   - Dans $\mathbb{R}[X]$: Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant strictement négatif. Exemple de factorisation, en passant par une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Compétences attendues

- Donner le degré, le coefficient dominant d'un polynôme.
- Réaliser une division euclidienne.
- Déterminer le reste de X^n par un polynôme de degré 2.
- Montrer que a est racine de P et déterminer sa multiplicité en utilisant des divisions euclidiennes.
- Factoriser un polynôme en cherchant d'abord une/les racine(s).
- Déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ connaissant une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

AN3 Limites

Prérequis : chapitre AN1 - Étude de fonctions, fonctions usuelles

1. **Notion de limite**
   - ▷ Définitions. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche.
   - ▷ Opérations sur les limites.
   - ▷ Limite d'une composée. Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Application : cos n'a pas de limite en $+\infty$.
   - ▷ Limites usuelles : limites des fonctions usuelles, croissances comparées, taux d'accroissement usuels.
   - ▷ Compatibilité avec la relation d'ordre.
2. **Théorèmes d'existence de limites**
   - ▷ Existence d'une limite par encadrement, majoration ou minoration.
   - ▷ Théorème de la limite monotone : Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.

Compétences attendues

- ▷ Calculer une limite.
- ▷ Reconnaître ou faire apparaitre une limite usuelle.
- ▷ Connaitre et utiliser les théorèmes d'existence de limites.

Info Boucles for

- ▷ Déjà vu : `input`, `disp`, instructions `if`
- ▷ Boucles `for`

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Exercice du cours : Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que si $P(a_k) = Q(a_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, alors $P = Q$.
- Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, pour $n \geqslant 2$.
- Déterminer les limites de la fonction partie entière en $+\infty$ et $-\infty$.
- Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, pour $a \in \mathbb{R}^*$.
- Démontrer que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$.
- **Informatique :**
  - Écrire un programme qui affiche le terme de rang n d'une suite récurrente (d'ordre 1).
  - Écrire un programme qui affiche le terme de rang n d'une somme simple (par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) ou d'un produit (par exemple $n!$).