Programme de colle S7

15 au 19 octobre 2018

AL2 Sommes (et produits)

1. **Définitions** : notations $\sum$, $\prod$. Factorielle.
2. **Règles de calcul**
   - ▷ Propriétés générales. Nombre de termes.
   - ▷ Extraction, regroupement. Application au calcul de sommes par récurrence.
   - ▷ Changement d'indice
   - ▷ Télescopage.
3. **Exemples classiques à connaître**
   - ▷ $\sum_{k=1}^{n} k$ et somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
   - ▷ $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
   - ▷ Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$ et vaut 0 sinon. Propriétés, triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.
4. **Exemples de sommes doubles**

Compétences attendues

- ▷ Démontrer la valeur d'une somme par récurrence.
- ▷ Calculer une somme en reconnaissant une formule du cours.
- ▷ Reconnaître un télescopage.
- ▷ Utiliser un changement d'indice.

AL3 Polynômes

1. **Définition de** $\mathbb{K}[X]$
   - ▷ Polynôme, ensemble $\mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), application polynomiale associée à un polynôme P (on confondra les deux notions).
   - ▷ Opérations : combinaison linéaire, produit, puissance, composition, dérivation. Propriétés des opérations.
   - ▷ Identités valables dans $\mathbb{K}[X]$: binôme de Newton, $X^{n+1} - 1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. **Degré d'un polynôme**
   - ▷ Définition. Le degré du polynôme nul est $-\infty$. Coefficient dominant/terme dominant d'un polynôme non nul. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$.
   - ▷ Degré de $P^{(k)}$, $P+Q$, de λP, de PQ, de P^n, de $P(Q(X))$.
   - ▷ $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.

3. **Division euclidienne**
   - ▷ Vocabulaire : multiple, diviseur
   - ▷ Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. CNS de divisibilité.
4. **Racines**
   - ▷ Définition. a est racine de P ssi $X-a$ divise P.
   - ▷ Multiplicité. a est racine de multiplicité m ssi $P=(X-a)^m Q$ avec $Q(a)\neq 0$.
     NB pour les colleurs : la caractérisation avec les dérivées n'a pas encore été vue.
   - ▷ Si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines (deux à deux distinctes, ou comptées avec multiplicité), alors $P=0$. Si $P\in\mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines, alors $P=0$. Autrement dit, un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ (forcément non nul) admet au plus n racines (comptées avec multiplicité).
5. **Factorisation**
   - ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$: théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1. Exemple de X^n-1.
   - ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$: Tout polynôme non constant se factorise en produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant strictement négatif. Exemple de factorisation, en passant par une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Compétences attendues

- ▷ Donner le degré, le coefficient dominant d'un polynôme.
- ▷ Réaliser une division euclidienne.
- ▷ Déterminer le reste de X^n par un polynôme de degré 2.
- ▷ Montrer que a est racine de P et déterminer sa multiplicité en utilisant des divisions euclidiennes.
- ▷ Factoriser un polynôme en cherchant d'abord une/les racine(s).
- ▷ Déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ connaissant une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Info Calculs - Instructions conditionnelles

- ▷ Écrire un calcul en Scilab : `+, -, *, /, ^, sqrt, exp, log, cos, sin, %e, %pi, %i`
- ▷ Instruction d'entrée : `input` ; Instruction de sortie : `disp`
- ▷ Instructions conditionnelles : `if`

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Énoncer et démonstration de la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$ par récurrence.
- Énoncer et démonstration de la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$, en utilisant un télescopage.
- Exercice du cours : Soient $n\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $P,Q\in\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que si $P(a_k)=Q(a_k)$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, alors $P=Q$.
- Factoriser X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$, pour $n\geqslant 2$.
- **Informatique :** écrire un programme Scilab qui demande de saisir un réel x puis affiche sa valeur absolue (en utilisant une instruction conditionnelle), ou tout autre exemple similaire.