Programme de colle S5

1er au 5 octobre 2018

AL1 Nombres complexes

1. **Nombres complexes**
    - ▹ Forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, addition, multiplication, produit, quotient.
    - ▹ Conjugué. Propriétés
2. **Module et arguments**
    - ▹ Interprétation géométrique : plan complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.
    - ▹ Module d'un nombre complexe. Propriétés. Inégalité triangulaire.
    - ▹ Nombres complexes de module 1, forme trigonométrique, écriture $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Formules de Moivre et d'Euler. Application : linéarisation d'expressions trigonométriques.
    - ▹ Argument d'un nombre complexe non nul. Formes trigonométrique et exponentielle.
    - ▹ Exemples de résolutions d'équations en utilisant la forme exponentielle : $z^n = \alpha$, $z^n = 1$.

Compétences attendues

- ▹ Écrire un nombre complexes sous plusieurs formes.
- ▹ Manipuler des nombres complexes.
- ▹ Connaître et utiliser la trigonométrie (voir chapitre AN1).
- ▹ Linéariser une expression trigonométrique.
- ▹ Résoudre des équations simples dans $\mathbb{C}$ (en particuler, les équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$).
- ▹ Résoudre une équation du type $z^n = \alpha$, avec α sous forme exponentielle.
  Remarque : la résolution de $z^2 = \alpha$ sous forme algébrique n'est pas attendue des étudiants.

AN2 Suites réelles

1. **Raisonnement par récurrence** (simple, double)
2. **Notion de suite**
    - ▹ Définition. Exemples de définition d'une suite : terme général explicite, par récurrence ou de manière implicite (avec le théorème de la bijection)
    - ▹ Opérations.
    - ▹ Étude qualitative : monotonie, suite majorée/minorée/bornée. Borne inférieure/supérieure. Maximum/minimum.

3. **Exemples classiques**
   - ▷ Suites arithmétiques : relation de récurrence, terme général, monotonie.
   - ▷ Suites géométriques : relation de récurrence, terme général, monotonie.
   - ▷ Suites arithmético-géométriques : définition, méthode de détermination du terme général.
   - ▷ Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. Terme général.
4. **Limite d'une suite réelle**
   - ▷ Suite convergeant vers un réel ℓ. Suites divergentes. Suites divergentes tendant vers l'infini. Unicité de la limite (réelle ou infinie). Cas des suites arithmétiques et géométriques.
   - ▷ Opérations algébriques sur les suites admetttant une limite. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
   - ▷ Théorème d'encadrement, d'existence de limite infinie par majoration/minoration.
   - ▷ Théorème de la limite monotone.
   - ▷ Suites adjacentes. Théorème de convergence des suites adjacentes.
   - ▷ Notion de suite extraite. Si (u_n) a une limite, toutes ses suites extraites ont la même limite (en particulier la suite (u_{n+1})).
   - ▷ Comparaisons des suites (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

Compétences attendues

- ▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double).
- ▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- ▷ Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- ▷ Étudier la monotonie d'une suite.
- ▷ Calculer des limites.
- ▷ Connaître et savoir utiliser les théorèmes de convergence.
- ▷ Démontrer que deux suites sont adjacentes.

Remarque : les sommes $\sum$ et produits $\prod$ (en particulier $n!$) seront traités dans un prochain chapitre.

Questions de cours

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition, une propriété ou un théorème figurant dans le programme ci-dessus.
- Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$. *On admettra le lemme :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$.
- Résoudre $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.
- Exemple du cours (pratique de la récurrence double). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = -3$, $u_1 = -10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer par **récurrence double** que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n - 4 \times 3^n.$$
- Donner la définition de deux suites adjacentes. Énoncer le théorème des suites adjacentes et le démontrer.
On admettra le lemme : si (u_n), croissante, et (v_n), décroissante, sont adjacentes, on a : $u_n \leqslant v_n$.