MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

16 janvier 2019 – Durée : 4 heures

Consignes

- $\boxed{\text{Encadrez}}$ les résultats et conclusions ;
- Numérotez les copies ;
- Tout raisonnement doit être rédigé en français ; Pas d'abbréviation ;
- Vous traitez les exercices dans l'ordre de votre choix ;
- Pas de document, pas de calculatrice.

EXERCICE 1

Partie 1 : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}, puis exprimer P^{-1} en fonction de Q.
2. Montrer que $D = \frac{1}{6}\,QMP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3. Exprimer M en fonction de D, Q et P puis montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} à l'aide de Q et P.
4. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$M^n = \frac{1}{6} P D^n Q$$

6. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer une matrice B telle que $M = B^2$.

Partie 2 : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $1/5$
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité $2/5$
  - le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - le cyclisme avec probabilité $1/5$
  - la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

8. Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1.

9. Calculer la probabilité pour qu'il enchaîne natation - course à pied - cyclisme - natation (dans cet ordre) les 4 premiers jours.

10. On suppose, pour cette question seulement, que l'athlète a fait du cyclisme le jour numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait fait de la natation le jour numéro 1 ?

11. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Déterminer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
On attend une justification précise.

12. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.

13. **Parenthèse informatique**. Écrire un programme Scilab qui :
    - définit la matrice A et la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$;
    - demande à l'utilisateur de saisir un entier naturel n ;
    - calcule et affiche la valeur de $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

14. Établir que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

16. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE 2

Partie 1 : étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$
et les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,
$$g(x) = e^{-x} - x^2 \qquad \text{et} \qquad h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

2. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, possède une unique solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

3. (a) Écrire une fonction Scilab qui, pour x un réel positif ou nul, renvoie la valeur de $h(x)$.
   (b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) = x\exp\left(\dfrac{-g(x)}{x}\right)$.
   (d) Montrer alors que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$ et sa limite en $+\infty$
   (f) Déterminer le tableau de signe de $h(x) - x$ pour $x \in [0, +\infty[$.

Partie 2 : étude d'une suite récurrente

On considère à présent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

4. Les programmes Scilab suivants renvoient, pour le premier, la valeur 5, et pour le second, la valeur 6. Que peut-on alors précisément dire de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie, limite) ?

Programme 1

```
u=1
n=0
while u>0.00001
    u=exp(-u)/u
    n=n+1
end
disp(n)
```

Programme 2

```
u=1
n=0
while u<100000
    u=exp(-u)/u
    n=n+1
end
disp(n)
```

5. **Étude de la suite extraite** (u_{2n+1})
   Pour cette partie, on posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < \alpha$.
   (b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = h(v_n)$.
   (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone. Préciser le sens de variation.
   (d) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.
6. **Étude de la suite extraite** (u_{2n})
   Pour cette partie, on posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n}$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone. Préciser le sens de variation.
   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. En déduire sa limite.
7. Conclure sur le comportement asymptotique* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

** à propos de son éventuelle limite.*