Mathématiques - Devoir surveillé n° 3

30 novembre 2018 – Durée : 4 heures

Consignes

- $\boxed{\text{Encadrez}}$ les résultats et conclusions ;
- Numérotez les copies ;
- Tout raisonnement doit être rédigé en français ; Pas d'abréviation ;
- Vous traitez les exercices dans l'ordre de votre choix ;
- Pas de document, pas de calculatrice.

Exercice 1 – Applications directes du cours

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to(-2)^+} \frac{1+x}{4-x^2}$.
2. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *On pourra séparer, si besoin, les cas* 0^+ *et* 0^-.
3. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$.
4. Déterminer l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = -1\}$.
5. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = 2n$.
   L'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
6. On pioche une main de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes. Ce jeu contient 8 cœurs, 8 trèfles, 8 carreaux et 8 piques.
   Calculer la probabilité d'obtenir 2 trèfles et 2 cœurs.

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, défini par $P = X^3 + X^2 - 3X - 3$.
   Montrer que -1 est racine de P et donner une factorisation (complète) de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $g'(x) = -P(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.
4. Dresser le tableau de variation complet de g.
5. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

EXERCICE 3

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note, pour tout entier naturel n, A_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n", B_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n". On note enfin C_n l'événement : "à l'instant n l'enfant est au sommet". On note a_n, b_n et c_n les probabiltés respectives de des trois événements. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \,;\; b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 3^n b_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   Établir, pour tout entier naturel n, que : $b_n = \frac{2n}{3^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$? En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Comment interpréter le résultat ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n l'événement : « l'enfant atteint le sommet à l'instant n ».
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $S_n = B_{n-1} \cap C_n$.
   (b) En déduire, pour $n \geq 2$, la valeur de $P(S_n)$.

PROBLÈME

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$.
4. Étudier les variations de la fonction dérivée f'.
5. Dresser alors le tableau des variations de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans un ensemble J à déterminer. On note φ la fonction réciproque associée. Que dire de la continuité et des variations de φ ?
7. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto f(t) - t$ sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. On calculera notamment $g'(1)$.
8. Montrer que l'équation $f(t) = t$, d'inconnue $t \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1. Préciser le tableau de signe de la fonction g sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

PARTIE II : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

On pensera à utiliser les résultats de la partie I.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

PARTIE III : Informatique

Ces trois questions sont indépendantes les unes des autres.

12. Écrire un programme **Scilab** qui demande de saisir un réel $t \geqslant 0$ et affiche la valeur de $f(t)$.
13. Écrire un programme **Scilab** qui demande de saisir un entier naturel n puis calcule et affiche la valeur de u_n. *On pourra utiliser le fait que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
14. Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 1| < 10^{-4}$.