MATHÉMATIQUES - DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

7 septembre 2018 – Durée : 2 heures

EXERCICE 1 – 6 POINTS

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 20$.

   (b) Calculer u_1 et u_2.

2. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il renvoie le premier entier naturel N tel que $u_N \geqslant 70$. Ici, la flèche $\longleftarrow$ signifie « prend la valeur ».

```
U ⟵ .........
N ⟵ 0
Tant que .........
        U ⟵ .........
        N ⟵ N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

   (b) La valeur est affichée à la fin de cet algorithme est 7. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4. Quel calcul faudrait-il faire pour obtenir le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019 ?

5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

6. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 – 4 POINTS

On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

On pose $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de Z.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle. L'argument sera donné dans $]-\pi,\pi]$.

3. En déduire la forme exponentielle puis la forme trigonométrique de Z.

4. Montrer alors que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 3 – 10 POINTS

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. (a) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Étudier les variations de la fonction g. On dressera un tableau de variation complet.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;\,0]$.

3. En déduire le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5. (a) Démontrer que, pour tout $x > 1$,

   $$1 < x < x^2 < x^3.$$

   (b) En déduire que, pour $x > 1$,

   $$0 < f(x) < 4x^3 \mathrm{e}^{-2x+1}.$$

   (c) On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3 \mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3 \mathrm{e}^{-2x}$ puis montrer que :

   $$\lim_{x \to +\infty} 4x^3 \mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

   (d) En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

6. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-2x+1}$.

7. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.