MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N° 9

Pour le lundi 25 février

EXERCICE 1 – DS DE L'AN DERNIER

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs $u_1 = (1,2,-4)$, $u_2 = (2,-1,3)$, et $u_3 = (0,1,-1)$ et $u_4 = (1,1,-3)$

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer alors les coordonnées de u_4 dans la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$.
3. Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_3, u_4)$. Déterminer une base de F.
   Indication : pensez à utiliser les questions précédentes.
4. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
5. Montrer que $F = G$.

EXERCICE 2

Calculer un équivalent simple puis la limite des suites suivantes :

$$u_n = n^2 \tan\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \quad ; \quad v_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on notera $f : x \mapsto e^x - x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $e^x - x = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, notée x_n.
2. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\ln(n) \leqslant x_n \leqslant \ln(n) + 1$ pour n assez grand.
4. En déduire un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$ (à justifier précisément). Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

EXERCICE 4

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

1. Donner l'expression de R_n en fonction de n.
2. Exprimer $T_{n+1} - T_n$ en fonction de n.
3. Montrer par ailleurs que $T_{n+1} = \frac{1}{2} T_n + R_n$.
4. En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
5. Les suites (R_n) et (T_n) sont-elles convergentes ? Si oui, donner leurs limites.