MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N^{o} 8

Pour le lundi 4 février

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n=3$ et $p=\dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $P(A)=\dfrac{13}{27}$.
2. Déterminer la loi de G puis calculer son espérance. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y=(-1)^X$.

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

3. On note $Z=\dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer la loi Z, en fonction de $P(A)$, puis démontrer que :
$$E(Y)=2P(A)-1$$
4. Donner la loi de X. En déduire que l'on a : $E(Y)=(1-2p)^n$. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
5. Démontrer que $P(A)\geqslant\dfrac{1}{2}\iff\left[p\leqslant\dfrac{1}{2}\text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$.

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A)\geqslant\dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G)\leqslant 0$).

6. Exprimer G en fonction de X. En déduire que : $E(G)=-10np(1-2p)^{n-1}$
7. Démontrer alors que : $P(A)\geqslant\dfrac{1}{2}$ et $E(G)\leqslant 0$ si et seulement si $p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Calculer w_0, w_1 et w_2.
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \sin^2(t)\ \mathrm{d}t$$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, w_n$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)\, w_n\, w_{n+1}$ est constante. On calculera sa valeur.
6. En utilisant les questions précédentes, justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle puis calculer celle-ci.