Mathématiques - Devoir maison n° 7

Travail en autonomie – Préparation au concours blanc

1 Algèbre

Chapitres essentiels de cette partie

- AL2 - Sommes
- AL3 - Polynômes
- AL5 - Matrices et systèmes linéaires

Niveau 1

Exercice 1

Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2

Les questions sont indépendantes.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $X^2 - 1$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-3)(X-2)$.
3. Factoriser $P = 2X^3 - 3X^2 - 8X - 3$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Calculer $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ et $\sum_{k=1}^{n} \binom{10}{k} 3^{10-k}$.

Exercice 4

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Niveau 2

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire les coefficients de A^n.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A+I_3)(A-2I_3) = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que
$$A^n = a_n A + b_n I_3$$
On précisera les relations de récurrences définissant les suites (a_n) et (b_n).
3. Montrer que (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire son terme général.
4. Déterminer A^n.

NIVEAU 3

EXERCICE 7

On souhaite résoudre l'équation $(E)\ :\ 6P(X)-(X^2+1)P''(X)=0$ par analyse-synthèse.

1. Analyse : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ une solution de (E). Montrer que $d=\deg(P)\leqslant 3$.
   On pensera à séparer les cas $d\leqslant 1$ et $d\geqslant 2$.
   On rappelle que si $d\geqslant 2$, $\deg(P'')=d-2$.
2. Synthèse : Déterminer quels polynômes $P\in\mathbb{R}_3[X]$ sont vraiment solutions de (E).

2 Analyse

CHAPITRES ESSENTIELS DE CETTE PARTIE

- AN1 - Études de fonctions
- AN2 - Suites réelles
- AN3 - Limites et continuité
- AN4 - Dérivabilité

NIVEAU 1

EXERCICE 8

1. Étudier la convergence des suites de terme général :
   $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; $v_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$; $w_n=\dfrac{3^n+2^n}{5^n-1}$.
2. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=3u_n+1$.
3. Déterminer le terme général de (u_n) définie par $u_0=2$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$.

EXERCICE 9

Soit $f : x\mapsto x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0. On notera toujours f le prolongement obtenu.
2. Étudier la continuité, la dérivabilité, la classe $\mathscr{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 10

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

1. Étudier la fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, donnée par $f(x)=\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$.
2. Montrer que $\forall x\geqslant 0$, $(1+x)^n\leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$.

NIVEAU 2

EXERCICE 11

Soit $f : x\mapsto\sqrt{2x+3}$.

1. (a) Justifer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on calculera. On notera cette solution α.
   (c) Justifier que, pour tout $x\in I=[0,3]$, $f(x)\in[0,3]$.
   (d) Justifier que, pour tout $x\in I$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   (e) Démontrer que, pour tout $x\in I$, $|f(x)-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}|x-\alpha|$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n\in[0,3]$.
   (b) Montrer que (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (d) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leqslant 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.
   (e) En déduire un rang n à partir duquel $|u_n-\alpha|\leqslant 10^{-3}$.

NIVEAU 3

EXERCICE 12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^n \ln(x) = 1$ admet une unique solution, qui sera notée x_n, et que $x_n \geqslant 1$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante et converge vers 1.

3 Probablités

CHAPITRES ESSENTIELS DE CETTE PARTIE

- PB1 - Espaces probabilisés finis

EXERCICE 13

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

- si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$
- si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k. On suppose que $r_0 = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, $r_{k+1} = \dfrac{1}{2} r_k + \dfrac{2}{5}$.
2. Déterminer r_k en fonction de k.
3. Calculer la limite de la suite (r_k). Interpréter.

EXERCICE 14

Un concours de tir à l'arc s'effectue sur deux cibles. Le tireur effectue seulement trois tirs, en changeant de cible à chaque fois. Il gagne le jeu s'il parvient à toucher deux cibles consécutivement. La probabilité de toucher la cible 1 (resp. la cible 2) est p (resp. q), avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants.

1. Stratégie 1 : le joueur tire en premier sur la cible 1. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
2. Stratégie 2 : le joueur tire en premier sur la cible 2. Déterminer la probabilité pour qu'il gagne.
3. Quelle stratégie est la meilleure ?

EXERCICE 15

On a $n \geqslant 2$ urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Dans chaque cas, l'urne U_k contient k boules noires et $n-k$ boules blanches.

On choisit une urne puis on tire une boule dans celle-ci. La probabilité de choisir l'urne U_k est égale à ka, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé.

1. Que vaut a ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule noire.
3. On tire une boule : elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne U_3 ?