MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N° 6

Pour le lundi 17 décembre.

EXERCICE 1

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x - \mathrm{e}^{-x} - 1.$$

PARTIE 1 - ÉTUDE DE f ET g

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée puis étudier les variations de g. On dressera un tableau de variation complet.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$-\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f'(x) < 0 \quad \text{puis} \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

5. Justifier de plus que $\alpha \in [1, +\infty[$.

PARTIE 2 - UNE SUITE RÉCURRENTE

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

2. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} |u_n - \alpha|.$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

5. On souhaite écrire un programme Scilab qui détermine une valeur approchée de α à $\pm 10^{-3}$.

   (a) Justifier que si $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant 10^{-3}$, alors $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.
   Dans ce cas, u_n est une valeur approchée de α à $\pm 10^{-3}$.

   (b) Écrire un programme Scilab qui calcule le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ et affiche le terme u_n correspondant.

EXERCICE 2

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le prolongement. Préciser alors $f(0)$.

   (c) Montrer que la nouvelle fonction f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.