MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N° 5

En autonomie – Le corrigé est disponible sur le site cpgedupuydelome.fr

EXERCICE 1

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires indiscernables au toucher.
On effectue une série de tirages d'une boule en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ». On a $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Calculer $P(U_3)$.
3. Pour tout $n \geqslant 2$, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)$$
5. Déterminer alors la valeur de $p_n = P(U_n)$ en fonction de n.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.
7. **Informatique**
   (a) Justifier que la commande `floor(3*rand())` renvoie 0, 1 ou 2, chacune avec probabilité $\frac{1}{3}$.
   (b) Recopier et compléter le programme pour qu'il demande à l'utilisateur de saisir un entier $n \in \mathbb{N}^*$ puis affiche l'urne et le résultat des n premiers tirages.

```
n =
urne = "U"
for k=
  if urne == "U" then
    boule =                  // valant 0, 1 ou 2
    if boule <= 1 then
      disp(      )
      urne =
    else

    end
  else
    boule =                  // valant 0, 1, 2 ou 3
    if


    else

    end
  end
end
```

EXERCICE 2 – Facultatif, plus difficile

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce de monnaie biaisée, avec laquelle on obtient *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$, ainsi qu'une urne contenant 3 boules noires et 4 boules blanches, indiscernables au toucher.

1. On lance trois fois de suite la pièce de monnaie (les trois lancers étant indépendants).

   Étant donné $k \in [\![0,3]\!]$, calculer la probabilité d'obtenir exactement k fois *Pile*.

2. Après avoir lancé trois fois la pièce, on décide d'extraire simultanément autant de boules dans l'urne que le nombre d'apparitions de *Pile*.

   (a) Soit $(k,\ell) \in [\![0,3]\!]^2$.
   Sachant que l'on a obtenu exactement k fois *Pile* lors des lancers de la pièce, quelle est la probabilité d'obtenir exactement ℓ boules noires à l'issue du tirage ?
   On distinguera, pour ce calcul, le cas où $k < \ell$ du cas où $k \geqslant \ell$.

   (b) Calculer, pour $\ell \in [\![0,3]\!]$, la probabilité de tirer exactement ℓ boules noires.
   Ici, on ne suppose plus connu le nombres de Pile obtenus.

3. On n'a tiré aucune boule noire.

   Quelle est la probabilité de n'avoir obtenu aucun *Pile* lors des lancers de la pièce ?