MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N° 4

Pour le lundi 19 novembre 2018

EXERCICE 1

PREMIÈRE PARTIE : ENCADREMENT DE L'ARC-TANGENTE

Soient g et h les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \text{Arctan}(x) - x$ et $h(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$.

1. Étudier les variations des fonctions g et h sur $[0,+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \text{Arctan}(x) \leqslant x$.

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

3. Étudier la parité de f.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
6. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On précisera $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
8. (a) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)$.
   Étudier les variations de u, et en déduire son signe. On déterminera en particulier les valeurs qui annulent u.

   (b) En déduire les variations de f. Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
9. (a) Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   On note $g : J \to \mathbb{R}_+$ la réciproque associée.

   (b) Étudier la continuité de g sur I et dresser le tableau de variation complet de g. Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
10. Dessiner l'allure des courbes représentatives de f et g, sur un même graphique.

EXERCICE 2

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$

1. Déterminer l'ensemble E_0 des antécédents de $(0,0)$. L'application f est-elle injective ?
2. Déterminer l'ensemble E_1 des antécédents de $(1,2)$. L'application f est-elle surjective ?
3. Montrer que l'ensemble image de f est $\text{Im}(f) = \{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\}$.
4. Dans un repère orthonormé du plan, représenter les ensembles E_0 et $\text{Im}(f)$.
5. On note $g = 4\text{id}_{\mathbb{R}^2} - f$. Montrer que,pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$g(x,y) = (x+y, 6x+2y)$$
6. Montrer que g est bijective et déterminer son application réciproque, que l'on notera φ.