MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N^o 2

Pour le lundi 8 octobre 2018

EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{u_n + 9}{u_n + 1}.$$

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{5v_n + 9}{v_n + 5} \text{ et } w_{n+1} = \frac{5w_n + 9}{w_n + 5}.$$

2. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x + 9}{x + 5}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_n \leqslant 3 \leqslant v_n$.
4. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elles admettent une limite, on la calculera.
6. Conclure sur l'éventuelle convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On notera, pour $x > 0$, $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx + \ln(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,1]$. On notera cette solution x_n.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_n \in]0,1]$ *et* $nx_n + \ln(x_n) = 0$ *(ce qui s'écrit aussi* $f_n(x_n) = 0$*).*

2. Déterminer u_0.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \leqslant x_n \iff f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$

En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que cette suite converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

4. Démontrer **par l'absurde** que $\ell = 0$. *On pensera à utiliser la relation* $nx_n + \ln(x_n) = 0$.

EXERCICE 3

Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}$$

sont adjacentes.