MATHÉMATIQUES - DEVOIR MAISON N° 1

Pour le lundi 24 septembre 2018

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son ensemble de définition. La courbe de f admet-elle des asymptotes ?
4. Justifier que, pour tout $x \in D$,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x^2-1)} \quad \text{avec} \quad g(x) = 2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1).$$
5. (a) Résoudre l'équation $1 - \ln(x^2-1) \geqslant 0$.
   (b) En déduire le signe de $g'(x)$ pour $x \in D$.
   (c) Dresser alors le tableau de variation de g sur D.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur D, α et $-\alpha$. On ne demande pas de calculer ces valeurs.
   (e) En déduire le signe de g sur D.
6. Dresser alors le tableau de variation de f sur D.

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : x \mapsto x\tan(2x) - x^2$ définie sur $I =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

1. Montrer que f est paire.
2. Justifier que f est dérivable sur I et montrer que, pour tout $x \in I$,
$$f'(x) = \tan(2x)(1 + 2x\tan(2x))$$
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Dresser son tableau de variation complet sur I.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 3

On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$.

1. (a) Calculer $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$. *On pensera aux suites géométriques.*
   (b) Déterminer deux expressions de $\mathrm{Re}(S)$ pour en déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
2. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, justifier que $\cos(a) \times \cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.
   (b) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
3. Justifier que, pour tout réel x, $\left(x - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)\left(x - \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right) = x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.